**DẠNG 5: RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ TÌM GTLN, GTNN**

**A. Kiến thức cần nhớ**

1. Xét bài toán: Cho biểu thức 

a) Rút gọn 

b) Tìm GTNN, GTLN của  hoặc một biểu thức có liên quan đến 

Ví dụ: Tìm Min (max) của 

2. Giải bài toán

- Tìm Tập xác định

- Rút gọn 

- Chỉ ra được số  sao cho  (hoặc ).

Chi ra  sao cho 

3. Chú ý: Với số thực  thì

- 

-  (bất đẳng thức ). Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi 

- , với các số thực 

- , với 

**B. Bài tập**

**Bài 1:** Chuyên Lê Hồng Phong, năm 2018

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Với mọi giá trị của  để biểu thức  có nghĩa. Chứng minh rằng 

**Lời giải**

a) Điều kiện: 

Ta có 



b) Với 

Ta có 

Dấu “=” xảy ra 

Do  nên  (đpcm).

**Bài 2:** *Chuyên Hưng Yên, năm 2017*

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm GTNN của biểu thức 

**Lời giải**

a) 

b) 

Dấu “=” xảy ra  (thỏa mãn)

**Bài 3:** *Học sinh giỏi huyện Cầu Giấy, năm học 2019 - 2020*

Cho biểu thức 

a) Tìm điều kiện của  để  có nghĩa và rút gọn 

b) Tìm GTNN của biểu thức 

**Lời giải**

a) Điều kiện 

Ta có 





b) Ta có 

 đạt GTNN thì  đạt GTLN  đạt GTNN

Lại có 

 Giá trị nhỏ nhất của 

 Giá trị nhỏ nhất của 

Vậy với  thì  có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

**Bài 4:** *Học sinh giỏi huyện Quan Sơn, năm học 2019 - 2020*

Cho biểu thức 

a) Rút gọn . Với giá trị nào của  thì 

b) Tìm x nguyên biết  đạt giá trị nguyên lớn nhất

**Lời giải**

a) Ta có 





b) Ta có 

P có giá trị lớn nhất khi  có giá trị lớn nhất  là số nguyên dương nhỏ nhất



**Bài 5:** *Học sinh giỏi huyện Cẩm Thủy Thanh Hóa Vòng 2, năm học 2019 - 2020*

Cho biểu thức 

a) Rút gọn 

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Lời giải**

a) Điều kiện 

Ta có: 



b) Có 

Dấu “=” xảy ra khi 

Vậy .

**Bài 6:** *Học sinh giỏi huyện Đan Phượng, năm học 2018 - 2019*

Cho biểu thức 

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

**Lời giải**

a) Điều kiện 

Ta có 



b) Ta có 

Vậy 

**Bài 7:** *Học sinh giỏi Tỉnh Lạng Sơn, 23/03/2019*

Cho biểu thức , với 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Lời giải**

a) Ta có 



b) Ta có 

Vì  nên áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có



Đẳng thức xảy ra  (thỏa mãn)

Vậy  khi .

**Bài 8:** Học sinh giỏi Tỉnh Quảng Bình, 23/03/2019

Cho biểu thức , với 

Rút gọn và tìm giá trị lớn nhất của A

**Lời giải**

Ta có 

Ta có 

Và 



. Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 1 khi 

**Bài 9:** Đại học Ngoaị Ngữ hà nội, năm học 2010

Cho biểu thức  và 

a) Rút gọn P

b) Với giá trị nào của x thì  đạt GTNN

**Lời giải**

a) Điều kiện 

Ta có 

b) 



Dấu “=” xảy ra 

Vậy 

**Bài 10:** *Chuyên Hưng Yên, năm học 2018-2019*

Cho các biểu thức  và  với 

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị của  để biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Lời giải**

a) Ta có 

b) 



Vậy 

**Bài 11:** *Chuyên Thái Bình, năm học 2018-2019*

Cho các biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị của  sao cho 

c) Với  tìm GTNN của 

**Lời giải**

a) Ta có 

b)  (thỏa mãn)

c)  (do  và áp dụng Côsi)

Vậy T có giá trị nhỏ nhất bằng 21 khi 

**Bài 12:** *Chuyên Toán Hà Nam, năm học 2019-2020*

Cho biểu thức , với 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm  để biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất

**Lời giải**

a) Ta có 





b) 

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số ta có 

Do đó , đẳng thức xảy ra khi 

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 8, đạt được khi .

**Bài 13:** *Chuyên Phú Yên, năm học 2019-2020*

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm  để  đạt giá trị lớn nhất

**Lời giải**

a) Điều kiện 

Ta có 





Do đó 

b) Ta có , dấu “=” xảy ra khi 

Vậy 

**Bài 14:** *Chuyên Quảng Ngãi, năm học 2019-2020*

Cho biểu thức , với 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm giá trị lớn nhất của 

**Lời giải**

a) Ta có 

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có 

Dấu “=” xảy ra khi  (thỏa mãn điều kiện)

**Bài 15:** *Chuyên Quảng Ninh, năm học 2019-2020*

Cho biểu thức , với 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm giá trị lớn nhất của 

**Lời giải**

a) Ta có 

b)  Với  ta có  nên 

Do đó .

**Bài 16:** *Chuyên Thái Bình vòng 1, năm học 2019-2020*

Cho biểu thức , với 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Biết  Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Lời giải**

a) Ta có 

, với 

b) Áp dụng bất đẳng thức Cachy, ta có: 

Dấu “=” xảy ra 

Vậy  tại 

**Bài 17:** *Học sinh giỏi Tỉnh Thanh Hóa, năm học 2013 - 2014*

Cho biểu thức , với 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Cho . Tìm giá trị lớn nhất của 

**Lời giải**

a) Ta có 





Theo bất đẳng thức Côsi ta có 

Dấu “=” xảy ra 

Vậy 

**Bài 18:** SPHN, năm 2015

Cho , với 

a) Chứng minh rằng 

b) Giả sử  thay đổi thỏa mãn . Tìm  của 

**Lời giải**

a) Ta có 





Vậy 

b) Ta có: 

. Vậy 

Dấu ‘=” xảy ra 

**Bài 19:** HSG Tỉnh Hà Nam, năm 2020 - 2021

Cho , với 

a) Rút gọn 

b) Tìm  để  đạt giá trị nhỏ nhất

**Lời giải**

a) Với  ta có:





Vậy với thì 

b) Ta có 

Dấu  xảy ra 

Vậy 

**Bài 20:** HSG Quận Nam Từ Liêm, năm 2020 - 2021

Cho , với 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Cho . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Lời giải**

1. a) Rút gọn biểu thức 

 với











Vậy  với

b) Cho . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

Với  ta có: .

Áp dụng bất đẳng thức Cô- Si ta có: 

Mặt khác: 

Hay 

Do đó: . Dấu  xảy ra.

Vậy  tại .

**Bài 21:** HSG Huyện Chương Mỹ, năm 2020 - 2021

Cho biểu thức , với 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tính giá trị của biểu thức  khi 

c) Tìm tất cả các giá trị nguyên của  để  nhận giá trị nguyên

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của 

**Lời giải**

1) Rút gọn biểu thức P









Vậy với v à t hì 

2) Tính giá trị của biểu thức P khi 

Ta có: 

  (tmđk  và )

Thay v ào biểu thức P, ta có: 

Vậy khi  thì 

3) Tìm tất cả các giá trị nguyên của  để  nhận giá trị nguyên

Ta có: 

 nguyên  nguyên 

Bảng tìm 

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|   |  -1 | 1 | -5 | 5 |
|   |  1 | 3 | -3 | 7 |
|   |  1 | 9 |   |  49 |
| Nhận định | Tmđk | Tmđk |  | Tmđk |

Với  thì  có giá trị nguyên

4) Tìm giá trị nhỏ nhất của .

Ta có: 





Dấu “=” xảy ra khi  (tmđk)

Vậy GTNN của:  khi .

**Bài 22:** HSG Huyện Ứng Hòa, năm 2020 - 2021

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tính giá trị lớn nhất của biểu thức 

c) Tính giá trị của  khi cho 

**Lời giải**

1) Rút gọn









.

2) 



Theo BĐT Cauchy ta có .

Nên 

Suy ra  dấu "=" xảy ra khi .

3) Từ 

Ta có 



( Do )

Thay  ( Thỏa ĐKXĐ ), ta tính được .

**Bài 23:** HSG Huyện Vĩnh Lộc, năm 2019 - 2020

Cho biểu thức 

a) Rút gọn biểu thức 

b) Tìm các giá trị của  sao cho 

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  biết rằng 

**Lời giải**

a) Điều kiện xác định: . Khi đó:





b) Để 

TH1: Khi 

TH2: Khi 

Đối chiếu với điều kiện xác định ban đầu ta được giá trị cần tìm của x là:  hoặc 

c) Ta có: B xác định khi 



Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho 2 số  và , ta được



Dấu “=” xảy ra khi: (t/m)

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức B là:  khi .